Prof. Dr. Daniel Huybrechts
Dr. Andrey Soldatenkov SS 2018

Übungen zur Einführung in die komplexe Analysis – Blatt 0

– Vorbereitung und Wiederholung–

Aufgabe -4. (Offene, abgeschlossene und kompakte Mengen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$)
(i) Wiederholen Sie den Begriff der offenen Menge: Eine Menge $U \subset \mathbb{R}$ heißt offen, falls für alle $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ mit $D_\varepsilon(x) \subset U$ existiert. Hierbei ist

$$D_\varepsilon(x) \coloneqq \{y \mid |x-y| < \varepsilon\}$$

das offene Interval vom Radius ε um x. Komplemente offener Mengen heißen abgeschlossen. Formulieren Sie analog, wann eine Menge $U \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ offen bzw. abgeschlossen heißt (unter Verwendung des Absolutbetrages $|\cdot|$ auf $\mathbb{C}$ oder, äquivalent, der Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^2$) und entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen $U_i \subset \mathbb{R}^2$ offen bzw. abgeschlossen sind:

$$U_1 \coloneqq D_\varepsilon(z_0) \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < \varepsilon\}, U_2 \coloneqq \{z \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}, U_3 \coloneqq \{z \mid -1 < \mathrm{Im}(z) < 1\}.$$

(ii) Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ (oder $K \subset \mathbb{C}$) heißt kompakt, falls K abgeschlossen und beschränkt ist. Dies ist genau dann der Fall, falls jede Folge $x_n \in K$ eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Punkt $x \in K$ konvergiert. Welche der folgenden Mengen $K_i \subset \mathbb{R}$ bzw. $K_i \subset \mathbb{C}$ sind kompakt?

$$K_1 \coloneqq \mathbb{N}, K_2 \coloneqq [0,1), K_3 \coloneqq \{(1/n) \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}, K_4 \coloneqq K_3 \cup \{0\}, K_5 \coloneqq [-1,1] \cup (1,2],$$
$$K_6 \coloneqq \bar{D}_\varepsilon(z_0) \coloneqq \{z \mid |z-z_0| \leq \varepsilon\}, K_7 \coloneqq \mathbb{H} \coloneqq \{z \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

Aufgabe -3. (Cauchyfolgen)
Zur Erinnerung: Eine Folge (x_n) reeller Zahlen $x_n \in \mathbb{R}$ heißt Cauchyfolge, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $m, n > n_0$ die Ungleichung $|x_m - x_n| < \varepsilon$ gilt.

(i) Man definiere entsprechend den Begriff von Cauchyfolgen für Folgen (z_n) komplexer Zahlen $z_n \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ unter Verwendung des Absolutbetrages $|\cdot|$ für komplexe Zahlen (oder der Norm $\|\cdot\|$ für Vektoren in $\mathbb{R}^2$). Man beweise, dass (z_n) genau dann eine Cauchyfolge ist, wenn $(\mathrm{Re}(z_n))$ und $(\mathrm{Im}(z_n))$ Cauchyfolgen sind.

(ii) Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ besagt, dass (x_n) genau dann eine Cauchyfolge ist, wenn (x_n) konvergent ist. Folgern Sie daraus die Vollständigkeit von $\mathbb{C}$.

Aufgabe -2. (Stetigkeit)
Zur Erinnerung: Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ auf einer Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ ist stetig in $x \in U$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für $y \in U$ aus $|y-x| < \delta$ bereits $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ folgt. Äquivalent dazu ist folgende Definition: Für alle Folgen (x_n) in U mit $\lim x_n = x$ gilt $\lim f(x_n) = f(x)$. Man übertrage diese Definition bzw. Fakt auf den Fall, dass $U \subset \mathbb{C}$ und $f\colon U \to \mathbb{C}$.

Abgabe: Dieses Blatt wird nicht bewertet und dient nur zur Wiederholung und Vorbereitung. Alle Begriffe sollten bekannt sein und die Aufgaben dienen nur zur Reaktivierung.

Falls nun U kompakt ist, dann nimmt eine in jedem Punkt von U stetige Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ sein Minimum und sein Maximum an. Man entscheide, ob dieser Fakt in den folgenden Situationen angewendet werden kann und bestimme ggf. Minimum bzw. Maximum:

(i) $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$; (ii) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, (iii) $f\colon \bar{D}_1(0) \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |z^2+2z+1|^{-1}$; (iv) $f\colon \bar{D}_\varepsilon(z_0) \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |z|$; (v) $f\colon \{z \mid \mathrm{Re}(z) = 0, |\mathrm{Im}(z)| \leq 1\} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |1/(1+z)|$.

Aufgabe -1. (Partielle Ableitungen)
Sei $f\colon U \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ eine auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ definierte Funktion. Wiederholen Sie den Begriff der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \coloneqq \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z_0), \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\right)$$

und entsprechend $(\partial f/\partial y)(z_0)$. Man schreibt oft auch $f_x = (\partial f/\partial x)$, $u_x = (\partial u/\partial x)$, etc. Die Jacobi-Matrix von f ist

$$J(f)(z_0) = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $z = (x,y) \mapsto z^2 = (x^2-y^2, 2xy)$ an der Stelle $z = 1$.

Aufgabe 0. ($\mathbb{R}$-lineare Abbildungen und $\mathbb{C}$-Linearität)
(i) Man betrachte die reellen Matrizen

$$I \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A \coloneqq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

und beweise, dass $A \cdot I = I \cdot A$ genau dann gilt, wenn $a = d$ und $b = -c$.

(ii) Man betrachte $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit $1 = (1,0)$ und $i = (0,1)$ und zeige, dass I als lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der Multiplikation $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto i \cdot z$ entspricht.

(iii) Schließlich zeige man, dass die zur Matrix A korrespondierende $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f_A\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung ist, also $f_A(z \cdot w) = z \cdot f_A(w)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ erfüllt ist, genau dann, wenn $A \cdot I = I \cdot A$. Man zeige auch, dass das der Fall ist, falls $f_A(z) = z \cdot f_A(1)$.

Informationen zum Übungsbetrieb.

Einteilung der Übungsgruppen. Die Belegung der Übungsgruppen erfolgt über die *BASIS*-Seite der Universität Bonn. Bei Fragen zum Belegverfahren wenden Sie sich bitte an das Bachelor-Master-Büro.

Übungsaufgaben. Jeden Freitag wird in der Vorlesung ein Blatt mit Übungsaufgaben ausgeteilt. Man siehe auch hier: `http://www.math.uni-bonn.de/people/aosoldat/komplan_V2B3_SS18.htmpl`. Abgabe ist jeweils am darauffolgenden Freitag vor(!!) der Vorlesung. Abgabe in Gruppen von bis zu 3 Personen ist erlaubt, solange jedes Gruppenmitglied mindestens eine Aufgabe pro Blatt aufschreibt.

Klausur. Voraussetzung für die Zulassung zur Klausur ist das Erreichen von mindestens 50% der Punkte aus den Übungsaufgaben.

Die Klausur findet am Montag, den 23.07.2018, 9:00–11:00 Uhr statt. Die Nachklausur findet am Donnerstag, den 13.09.2018, 9:00–11:00 Uhr statt.

Literatur. Es wird kein Skript zur Vorlesung geben und die Vorlesung wird sich auch nicht (streng) an einem Lehrbuch orientieren. Literaturempfehlungen finden Sie auf der Seite der Vorlesung `http://www.math.uni-bonn.de/people/aosoldat/komplan_V2B3_SS18.htmpl`.