Prof. Dr. Daniel Huybrechts
Dr. Andrey Soldatenkov SS 2018

Übungen zur Einführung in die komplexe Analysis – Blatt 11

Aufgabe 66. (Koebe Funktion, 3 Punkte)
Man zeige, dass die *Koebe Funktion*

$$f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

injektiv ist und bestimme ihr Bild. Man zeige, dass $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$. (Die Bieberbach Vermutung, bewiesen von De Brange 1985, besagt, dass jede injektive holomorphe Abbildung $f\colon \mathbb{D} \hookrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots$ die Ungleichungen $|a_n| \leq n$ erfüllt. In diesem Sinne ist die Koebe Funktion maximal.)

Aufgabe 67. (Biholomorphe Abbildungen, 3 Punkte)
Sei $f\colon U \to V$ eine holomorphe Bijektion zwischen offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{C}$. Ist dann f schon biholomorph, also auch f^{-1} holomorph? Man vergleiche das Ergebnis mit der reellen Situation.

Aufgabe 68. (Holomorphe Funktionen als Integrale, 3+3 Punkte)
(i) Sei $h\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger. Man zeige, dass

$$f(z) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-zt}dt$$

eine ganze Funktion definiert.

(ii) Man zeige, dass das Integral $\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}-e^{-zt}}{t}dt$ für $\mathrm{Re}(z) > 0$ lokal gleichmäßig und absolut konvergiert. Man beweise darüberhinaus für den Hauptzweig des Logarithmus die Gleichheit

$$\log(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}-e^{-zt}}{t}dt.$$

Aufgabe 69. (Runge Approximation, 3 Punkte)
Man zeige, dass es eine Folge von Polynomen $P_n(z)$ gibt, so dass

$$\lim_{n\to\infty} P_n(z) = \begin{cases} 1 & \mathrm{Im}(z) > 0 \\ 0 & \mathrm{Im}(z) = 0 \\ -1 & \mathrm{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

Bitte wenden.

Abgabe: Freitag 6.7. vor(!) der Vorlesung.

Aufgabe 70. (Summation über Primzahlen, 3 Punkte)
Wir wissen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. Sein nun $p\colon \mathbb{N} \to \mathrm{PZ}$ eine Bijektion (also eine Aufzählung aller Primzahlen in beliebiger Reihenfolge und ohne Wiederholungen). Man zeige, dass auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p(n)} = \infty$.

Wichtige Informationen:

- Die letzte Vorlesung findet am 13. Juli 2018 statt. Die Woche 16.7.-20.7 dient der Klausurvorbereitung. Tutorien finden in dieser Woche wie gewöhnlich statt.

- Die Klausur findet am 23. Juli 2018 im KHS und GHS statt. Beginn 9:00 (bitte 15 min früher dasein); Ende 11:00. Personalausweis und Studentenausweis mitbringen!

- Die Klausur wird noch am selben Tag korrigiert. Die Klausureinsicht ist für Montag den 13.8., 14:00 Uhr geplant. Der Raum wird rechtzeitig auf der Webseite der Vorlesung bekanntgegeben.

- Für die Klausur sind alle in der Vorlesung behandelten Themen relevant.