Prof. Dr. Daniel Huybrechts
Dr. Andrey Soldatenkov SS 2018

Übungen zur Einführung in die komplexe Analysis – Blatt 12

Aufgabe 71. (Γ-Funktion, 4 Punkte)
Man finde einen Beweis für die Gleichung

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

mittels der Eulerschen Produktdarstellung $\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$.

Aufgabe 72. (Dirichletsche Reihen, 3 Punkte)
Wir betrachten eine Folge (a_n) komplexer Zahlen und die dazu assoziierte Dirichletsche Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Wir setzen voraus, dass diese für ein gewisses $s_0 \in \mathbb{C}$ konvergiert. Man beweise, dass sie dann lokal gleichmäßig auf der Halbebene $\{s \mid \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)\}$ konvergiert.

Aufgabe 73. (Möbius-Funktion, 3 Punkte)
Es sei $\mu(n)$ die *Möbius-Funktion*, also $\mu(1) = 1$, $\mu(p_1 \cdot \cdots \cdot p_k) = (-1)^k$ für paarweise verschiedene Primzahlen p_i und sonst $\mu(n) = 0$. Man beweise für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ die Formel

$$\zeta(s)^{-1} = \prod_{p \text{ PZ}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Für die *Mertens Funktion* $M(x) \coloneqq \sum_{n\leq x} \mu(n)$ wurde lange Zeit die Ungleichung $|M(x)| < x^{1/2}$ für alle x vermutet. Die Mertensschen Vermutung würde die Riemannsche Vermutung beweisen und sie wurde für alle $x < 10^{14}$ auch bewiesen. Allerdings stellte sie sich trotz der numerischen Evidenz im Endeffekt 1986 als falsch heraus (Odlyzko und Riele). Aber auch die schwächere Form $M(x) = \mathrm{O}(x^{1/2+\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$ würde die Riemannsche Vermutung beweisen und diese ist weiterhin offen.

Aufgabe 74. (Kotangens und Zeta-Werte, 3 Punkte)
Man beweise die Formel

$$\pi z \cot(\pi z) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) z^{2n}.$$

Hinweis: Man denke an die Produktdarstellung des Sinus. Dies kann erneut benutzt werden, um $\zeta(2n) = (-1)^{n-1}\frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}B_{2n}$ zu zeigen. Es gilt auch die Gleichung

$$\log\Gamma(z) = -\gamma z + \frac{\zeta(2)}{2}z^2 - \frac{\zeta(3)}{3}z^3 + \frac{\zeta(4)}{4}z^4 \pm \cdots$$

für $|z| < 1$, die aber komplizierter zu beweisen ist.

Bitte wenden.

Abgabe: Freitag 13.7. vor(!) der Vorlesung.

Wichtige Informationen:

- Die letzte Vorlesung findet am 13. Juli 2018 statt. Die Woche 16.7.-20.7 dient der Klausurvorbereitung. Tutorien finden in dieser Woche wie gewöhnlich statt.

- Die Klausur findet am 23. Juli 2018 im KHS und GHS statt. Beginn 9:00 (bitte 15 min früher dasein und Personalausweis und Studentenausweis mitbringen); Ende 11:00. Die Klausur wird noch am selben Tag korrigiert. Die Klausureinsicht ist für Montag den 13.8., 14:00 Uhr geplant. Der Raum wird rechtzeitig auf der Webseite der Vorlesung bekanntgegeben.

- Für die Klausur sind alle in der Vorlesung behandelten Themen relevant.

Kurzweiliges zur Riemannschen Zetafunktion:

`https://www.ams.org/notices/200303/fea-conrey-web.pdf`

`http://www.3blue1brown.com/videos/2017/5/26/visualizing-the-riemann-zeta-function-and-analytic-continuation`

`https://www.youtube.com/watch?time_continue=142&v=w-I6XTVZXww`

`https://www.youtube.com/watch?v=rGo2hsoJSbo`