Prof. Dr. Daniel Huybrechts
Dr. Andrey Soldatenkov SS 2018

Übungen zur Einführung in die komplexe Analysis – Blatt 7

Aufgabe 43. (Singularitäten, 2+2 Punkte)
Man bestimme den Typ der folgenden isolierten Singularitäten in z_0 und gebe ggf. Polordnung bzw. (im Fall wesentlicher Singularität) das Bild $f(D_\varepsilon(z_0))$ (für $0 < \varepsilon \ll 1$) an:

1. $f(z) = \frac{\cos(z)-1}{\sin(z)-z}$, $z_0 = 0$.
2. $f(z) = e^{\frac{1}{z-z_0}}$, $z_0 \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 44. (Transzendente Funktionen, 3+2 Punkte)
Eine ganze Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt *transzendent*, falls sie kein Polynom ist.

1. Man beweise, dass eine ganze Funktion f genau dann transzendent ist, falls $\mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(1/z)$ eine wesentliche Singularität hat.
2. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganz transzendente Funktion. Man beweise, dass für alle $w \in \mathbb{C}$ eine Folge $z_n \to \infty$ mit $\lim f(z_n) = w$ existiert. *Hinweis:* Man verwende den Satz von Casorati–Weierstrass.

Aufgabe 45. (Meromorphe Funktionen, 2+2+2 Punkte)
Man entscheide, ob es sich in den folgenden Fällen um meromorphe Funktionen handelt. Wenn ja, was ist das Gebiet und was ist die Polstellenmengen?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \text{ (vgl. Aufgabe 13) ;} \qquad \tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}; \qquad \frac{e^{1/z}}{\sin(1/z)}.$$

Aufgabe 46. (Holomorphe Funktionen auf der Riemannschen Zahlenkugel, 2 Punkte)
Sei $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ holomorph mit Bild in $\mathbb{C} \subset \widehat{\mathbb{C}}$. Man beweise, dass dann f schon konstant ist.

Aufgabe 47. (Residuum, 2 Punkte)
Sei $f\colon U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol der Ordnung n in z_0. Man beweise, dass dann

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \big((z-z_0)^n f(z)\big)$$

.

Aufgabe 48. (Reelle Integrale, 3+3 Punkte)
Man berechne folgende Integrale mittels des Residuensatzes:

1. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+\sin^2(t)}$,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^2}$, $a, b > 0$

Wichtig: Die Evaluation dieser Vorlesung findet online statt. Der Befragungszeitraum läuft vom 15. Mai bis zum 4. Juni 2018. Die entsprechende Information ist Ihnen per email zugegangen. Die Evaluation dient der Qualitätssicherung und -verbesserung in unseren Studiengängen und kann nur gelingen, wenn möglichst viele Studierende sich beteiligen.)

Abgabe: Freitag 8.6. vor(!) der Vorlesung.