Prof. Dr. Daniel Huybrechts
Dr. Andrey Soldatenkov

SS 2018

Übungen zur Einführung in die komplexe Analysis – Blatt 8

Aufgabe 49. (Meromorphe Funktion, 2 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \to \widehat{\mathbb{C}}$ stetig, so dass $f^{-1}(\infty) \subset U$ diskret ist und f auf $U \setminus f^{-1}(\infty)$ holomorph. Man beweise, dass dann f meromorph ist.

Aufgabe 50. (Integrale und Residuen, 3+3 Punkte)
Man beweise folgende Gleichungen:

1. $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$
2. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^4+1} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

Aufgabe 51. (Satz von Rouché, 2+3 Punkte)
Man beweise folgende Aussagen:

1. Alle Nullstellen des Polynoms $f(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ liegen im Kreisring $D_{1,2}(0)$.
2. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen mit $\overline{D}_1(0) \subset U$ und $f: U \to \mathbb{C}$ eine nichtkonstante, holomorphe Funktion. Falls $|f(z)| = 1$ für alle z mit $|z| = 1$, dann gilt $D_1(0) \subset f(D_1(0))$. *Hinweis:* Man zeige, dass für beliebige $w_1, w_2 \in D_1(0)$: $w_1 \in f(D_1(0)) \Leftrightarrow w_2 \in f(D_1(0))$.

Aufgabe 52. (Produktformel, 3 Punkte)
Man finde eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, deren Residuum (in 0) gegeben ist durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}.$$

Aufgabe 53. (Möbiustransformationen, 3 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine Matrix mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $\det(A) = ad - bc = 1$. Sei $f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Man beweise, dass f_A ein Automorphismus von $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ ist.

Aufgabe 54. (Aut($\mathbb{H}$), 4 Punkte)
Sei $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ die Gruppe aller reeller 2×2 Matrizen A mit $\det(A) = 1$. Es folgt aus Aufgabe 53, dass $A \mapsto f_A$ ein Gruppenhomomorphismus $\varphi: \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ ist. Man beschreibe den Kern von φ und beweise, dass φ surjektiv ist. *Hinweis:* Man verwende das Lemma von Schwarz (Aufgabe 30, Blatt 5).

Abgabe: Freitag 15.6. vor(!) der Vorlesung.