Prof. Dr. Daniel Huybrechts SS 2018
Dr. Andrey Soldatenkov

Übungen zur Einführung in die komplexe Analysis – Blatt 9

Aufgabe 55. (Hurwitz, 3+3 Punkte)
Sei $f_n \colon U \to \mathbb{C}$ eine lokal gleichmäßig konvergente Folge holomorpher Funktionen auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ mit Grenzfunktion $f \colon U \to \mathbb{C}$, so dass f nicht konstant ist. Man beweise folgende Verallgemeinerung bzw. Konsequenz des Satzes von Hurwitz:

1. Haben die Funktionen höchstens m Nullstellen in U (mit Vielfachheit), so hat auch f höchstens m Nullstellen.
2. Sind die Funktionen f_n sämtlich injektiv, so auch f.

Aufgabe 56. (Riemannsche Zetafunktion, 2 Punkte)
Man beweise die Gültigkeit der Gleichung

$$(1 - 2^{1-s}) \cdot \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^s}$$

für $\mathrm{Re}(s) > 1$. Die Reihe (bis auf Vorzeichen) ist die Dirichlet Eta-Funktion und konvergiert für $\mathrm{Re}(s) > 0$. Bedeutet das schon, dass $\zeta(s)$ meromorph auf der Menge $\{s \mid \mathrm{Re}(s) > 0\}$ mit einem einfachen Pol in $s = 1$ ist?

Aufgabe 57. (Reihendarstellungen sind nicht eindeutig, 3 Punkte)
Man beweise die Formel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^n}{1 - z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1 - z^n)^2}$$

und die normale Konvergenz beider Reihen für $|z| < 1$.

Aufgabe 58. (Unendliche Produkte, 3 Punkte)
Man beweise

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Welche Beziehung gibt es zur Produktformel für $\sin(\pi z)$?

Aufgabe 59. (Gamma Funktion, 3 Punkte)
Man berechne die Residuen der Gamma Funktion in den Polstellen $z_n = -n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Abgabe: Freitag 22.6. vor(!) der Vorlesung.

Die Fachschaft Mathematik feiert am 21.06. ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Mo. 18.06., Di. 19.06. und Mi 20.06. in der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weitere Infos auch auf fsmath.uni-bonn.de